



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

por

Rômulo da Silva Lima

Trabalho de Conclusão de Curso
Bacharelado em Matemática Computacional

Prof. Dr. André Jacomel Torii
Orientador

João Pessoa, julho de 2017.

RÔMULO DA SILVA LIMA

SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

Monografia de conclusão de curso apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática Computacional, do Centro de Informática da Universidade Federal da Paraíba como requisito à conclusão do curso.

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii.

João Pessoa - PB

2017

Ficha Catalográfica elaborada por
Rogério Ferreira Marques CRB15/690

L732s

Lima, Rômulo da Silva.

Soluções de referência para a equação da onda bidimensional /
Rômulo da Silva Lima. – João Pessoa, 2017.
67p. : il.

Monografia (Bacharelado em Matemática Computacional) –
Universidade Federal da Paraíba - UFPB.

Orientador: Prof^o. Dr. André Jacomel Torri.

1. Equações e sistemas diferenciais. 2. Equação da onda. 3.
Diferenças finitas. 4. Matemática computacional. I. Título.

UFPB/BSCI

CDU: 517.926 (043.2)



CENTRO DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 14 dias do mês de **Junho** de 2017, às 16:00 horas, em sessão pública no **Auditório do Centro de Informática** da Universidade Federal da Paraíba, na presença da banca examinadora presidida pelo professor orientador **André Jacomel Torii** e pelos professores **Sérgio de Carvalho Bezerra** e **Jairo Rocha de Faria**, o aluno **Rômulo da Silva Lima**, apresentou o trabalho de conclusão de curso intitulado: **Soluções de Referência para a Equação da Onda Bidimensional** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de **Bacharelado em Matemática Computacional**.

Após a exposição oral, o candidato foi arguido pelos componentes da banca que reuniram-se reservadamente, e decidiram, APROVAR a monografia, com nota 10,0. Divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes, eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

André Jacomel Torii

Sérgio de Carvalho Bezerra

Jairo Rocha de Faria

Rômulo da Silva Lima

*”A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada,
ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.”*

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que tem iluminado meu caminho ao longo desta caminhada, me dando força, coragem e confiança. À minha família, pela educação dada e por ter acreditado em mim, me dando apoio nos momentos difíceis. Mãe, todo amor e carinho incondicional que tens me dado sempre o levarei como motivação para minhas futuras conquistas. Pai (*in memoriam*), onde quer que esteja, obrigado pelas orientações que me deu e pelos valores de um homem honesto, humilde e valente que eu sempre tive como exemplo! Agradeço também a meus irmãos pelo companheirismo e incentivo que sempre me deram. A minha namorada e companheira de todas as horas Mayara Layra, por todo amor, força e carinho transmitidos através de gestos e palavras!

A meu orientador André Jacomel Torii, pela excelente orientação, estando sempre disponível para esclarecer minhas dúvidas de modo muito amigável, me aconselhando com muita paciência e humildade. A todos os professores do curso que me acompanharam no meu processo de aprendizagem. Em especial a Waldir Roque, que me orientou por um período, me fazendo enxergar as oportunidades que o curso tem a oferecer, a Jairo Rocha pela consolidação de meus conhecimentos através de suas disciplinas da graduação e Pós-graduação, a Roberto Quirino pela paciência e pela brilhante forma de transmitir suas matérias, a Andrea Rocha, Ana Wyse e Kely Villacorta pelo apoio prestados com muito carinho e simpatia.

A meus amigos Raul Renner, Natanailza Alves, Diego Meira, Maria Rejane, Moises Oliveira, Laura Alves, Dennys Costa, Diogo Pereiral, Allison Moura pela amizade sincera, pelos momentos de descontração proporcionados e também pelos conhecimentos compartilhados e a todos que contribuíram com minha formação, mesmo não citados aqui, o meu muito obrigado!

Sumário

AGRADECIMENTOS	iii
LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 INTRODUÇÃO	1
2 PROBLEMAS DE REFERÊNCIA	3
2.1 Problema 1: Condição de Dirichlet	4
2.2 Problema 2: Condição de Neumann	7
3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS	11
3.1 Solução Analítica: Problema 1	11
3.1.1 Solução do Problema 1-A	16
3.1.1.1 Passo 1	16
3.1.1.2 Passo 2	18
3.1.1.3 Autofunções e Autovalores	20
3.1.1.4 Passo 3	21
3.1.2 Solução do Problema 1-B	24
3.1.3 Solução do Problema 1 para f_y Quadrático	27
3.2 Solução Analítica: Problema 2	29
3.2.1 Solução do Problema 2-A	33
3.2.1.1 Passo 1	33
3.2.1.2 Passo 2	34
3.2.1.3 Autofunções e Autovalores	35

3.2.1.4	Passo 3	36
3.2.2	Solução do Problema 2-B	37
3.2.3	Solução do Problema 2 para f_y Quadrático	38
4	SOLUÇÃO APROXIMADA	41
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	45
5.1	Convergência da Solução Aproximada	46
5.1.1	Problema 1: Condição de Dirichlet	46
5.1.2	Problema 2: Condição de Neumann	47
5.2	Dificuldades Numéricas em Função do Parâmetro ϕ	48
5.2.1	Problema 1: Condição de Dirichlet	48
5.2.2	Problema 2: Condição de Neumann	49
6	CONCLUSÕES	53
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
7	APÊNDICE	56

Lista de Figuras

Figura 2.1	Condições iniciais e de contorno do Problema 1 (Eq.(2.1)-(2.8))	5
Figura 2.2	Condições iniciais e de contorno do Problema 2 (Eq.(2.28)-(2.35))	8
Figura 4.1	Exemplo de discretização do domínio com n pontos em x e m pontos em y	44
Figura 4.2	Exemplo de discretização do domínio ao longo dos tempos t , $t - \Delta t$ e $t + \Delta t$	44
Figura 5.1	Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 1 para $\phi = 10$, com diferentes valores de n_t	46
Figura 5.2	Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 2 para $\phi = 10$, com diferentes valores de n_t	47
Figura 5.3	Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 1 para a) $\phi = 10$, b) $\phi = 40$ e c) $\phi = 70$	50
Figura 5.4	Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 2 para a) $\phi = 10$, b) $\phi = 40$ e c) $\phi = 70$	51
Figura 5.5	Comparação da solução aproximada e analítica do Problema 1 para $t = 3$	52
Figura 5.6	Comparação da solução aproximada e analítica do Problema 2 para $t = 4$	52

RESUMO

A modelagem através de Equações Diferenciais (ED) tem sido de grande importância tanto para o estudo do comportamento e compreensão de diversos fenômenos, quanto para o desenvolvimento de técnicas que visam obter soluções para as Equações Diferenciais (ED). A solução exata de uma ED nem sempre é possível de ser encontrada e, neste caso, o uso de métodos numéricos para obter a solução aproximada se faz necessário. No entanto, a precisão dos métodos numéricos foram bastante aprimoradas ao longo dos anos, o que dificulta a realização de uma comparação entre eles, já que a diferença entre os métodos em termos de precisão é muito pequena. No intuito de fornecer um suporte para realizar comparações entre métodos numéricos de alta precisão, este trabalho apresenta duas soluções analíticas de referência para dois problemas de valor inicial e de contorno, modelados pela Equação da Onda Bidimensional, onde essas soluções trazem consigo um parâmetro de ajuste ϕ caracterizado como a frequência de excitação de uma membrana. O parâmetro de ajuste ϕ , presente nas soluções analíticas, será utilizado como artifício para dificultar a aproximação da solução exata, viabilizando a comparação entre métodos numéricos extremamente precisos. O presente trabalho também fornece a aproximação das soluções dos problemas propostos utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), bem como uma análise no que diz respeito a sua precisão, levando em consideração o parâmetro de ajuste ϕ .

Palavras-chave: Equação da Onda, Frequência de Excitação, Solução de Referência, Diferenças Finitas, Métodos Numéricos.

ABSTRACT

The modelling through Differential Equations (DE) has been of great importance for the study of the behavior and comprehension of several phenomena, as well as for the developing of technics for obtaining solutions for these differential equations. The exact solution of a DE is not always possible to be found, and, in this case, the use of numerical methods to obtain approximate solutions is necessary. However, the precision of numerical methods has improved along the years, what makes it difficult to compare them, since the difference in terms of precision of the methods is generally small. In order to provide a support to make comparisons between high precision numerical methods, this work presents two benchmark solutions for two initial value and boundary problems, modeled by the Bi-dimensional Wave Equation, that includes an adjustment parameter ϕ , defined as the membrane's frequency of excitation. The parameter ϕ , present in the benchmark solutions, will be used as an artifice to difficult the approximation of the exact solution, making viable the comparison between highly precise methods. This work also provides the approximation of the solutions of the proposed problems using the Finite Difference Method, with an analysis about its precision taking in consideration the adjustment parameter ϕ .

keywords: Wave Equation, Excitation Frequency, Benchmark Solution, Finite Differences, Numerical Methods.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, são apresentadas duas soluções de referência para um problema governado pela equação da onda bidimensional. A equação da onda, que é um exemplo de uma equação do tipo hiperbólico, é aplicada em diversas situações práticas como em vibrações de sólidos elásticos [4, 11]. Problemas cuja geometria do domínio tem um alto grau de complexidade necessitam de um método aproximado de solução, como, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas (MDF) [2] ou o Método dos Elementos Finitos (MEF) [14, 7, 1].

A utilização de métodos numéricos para o cálculo de soluções aproximadas de equações diferenciais em geral, tem se tornado cada vez mais necessária, uma vez que a obtenção da solução exata de equações que modelam fenômenos complexos nem sempre é trivial. Entretanto, boa parte das soluções analíticas encontradas na literatura não requer grandes esforços dos métodos numéricos para que soluções aproximadas precisas sejam obtidas. Nesse contexto, a comparação entre métodos de alta precisão é prejudicada já que as soluções encontradas são semelhantes, o que dificulta a comparação e a percepção de qual método é mais eficiente em termos de precisão.

Os problemas propostos, neste trabalho, consistem em uma membrana vibrante e na formulação destes modelos, há um parâmetro de ajuste caracterizado como a frequência de excitação, que será utilizado na solução analítica como artifício para dificultar a aproximação das soluções pelos métodos numéricos. Para problemas bidimensionais, uma solução com essa natureza pode ser bastante útil, visto que na literatura, existem poucas soluções desse tipo, isto é, que viabilizam a comparação entre métodos numéricos de alta precisão. O trabalho desenvolvido em [10] segue a mesma linha do tema em questão, porém aplicado a um caso específico, com uma solução unidimensional. Já [13] disponibiliza uma outra solução específica

unidimensional, embora o foco não seja a comparação de métodos numéricos. O objetivo deste trabalho é apresentar duas soluções analíticas de referência em que métodos numéricos possam ser comparados e também analisados no que diz respeito a sua precisão, levando em consideração o parâmetro de ajuste disponibilizado.

A estrutura deste trabalho está organizada em Seções e Subseções onde apresentaremos no Capítulo 2 os dois problemas propostos, com suas respectivas soluções analíticas, no Capítulo 3 demonstraremos a obtenção das soluções analíticas na qual uma solução específica é calculada para o caso de uma função quadrática. No Capítulo 4 iremos calcular de forma aproximada as soluções dos problemas utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), no Capítulo 5 discutiremos, através de exemplos numéricos, a utilidade das soluções obtidas, fazendo o uso de figuras no intuito de validar as soluções analíticas e por fim, concluiremos o nosso trabalho e guiaremos possíveis ideias que podem seguir a mesma abordagem do tema em questão.

2 PROBLEMAS DE REFERÊNCIA

Neste capítulo, iremos apresentar os dois problemas regidos pela equação da onda bidimensional e encontrar as suas soluções analíticas, a qual iremos chamar de soluções de referência. A diferença entre os problemas propostos está na condição de contorno prescrita. O Problema 1 é formulado com condições de Dirichlet, isto é, que não envolvem a derivada de uma função prescrita no contorno do problema, enquanto que o Problema 2 é formulado com a derivada de uma das condições de contorno, isto é, existe uma condição de Neumann prescrita [12]. Posteriormente, iremos definir cada um dos problemas e encontrar as suas respectivas soluções.

De forma geral, a precisão dos métodos numéricos está relacionada com o valor das derivadas espaciais e temporais da solução. Nos problemas propostos por este trabalho, verifica-se que quanto maiores forem os valores da frequência de excitação ϕ , maiores serão os valores das derivadas. Assim, é possível tornar o problema tão difícil para ser resolvido computacionalmente quanto se queira, no que diz respeito à precisão da solução obtida, bastando para isso, aumentar a frequência de excitação ϕ . Isto permite que as soluções de referência apresentadas adiante possam ser utilizadas para a comparação de métodos numéricos extremamente precisos, que em outros casos talvez obtivessem soluções tão precisas que não pudessem ser comparadas adequadamente.

2.1 Problema 1: Condição de Dirichlet

O Problema 1 é definido da seguinte maneira: encontrar $u_1(x, y, t)$ que satisfaz

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right), \quad [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, T] \quad (2.1)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$u_1(0, y, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$u_1(x, 0, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$u_1(x, L_y, t) = 0, \quad (2.4)$$

$$u_1(L_x, y, t) = \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (2.5)$$

com

$$f(0) = f(L_y) = 0, \text{ (condição de compatibilidade)} \quad (2.6)$$

$$u_1(x, y, 0) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_1(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

A figura (2.1) ilustra as condições iniciais (seta azul) e de contorno (seta vermelha) do Problema 1 descrito acima.

A condição de Dirichlet dada pela Eq.(2.5) será modificada no Problema 2. Uma solução fraca para este problema, considerando a função $f(y)$ genérica, é dada pela equação

$$u_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^a(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^b(x, y, t) + \frac{x}{L_x} \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (2.9)$$

onde $v_{m,n}^a(x, y, t)$ é definido por

$$v_{m,n}^a(x, y, t) = (B_{m,n}^* \text{sen}(\lambda_{m,n} t)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.10)$$

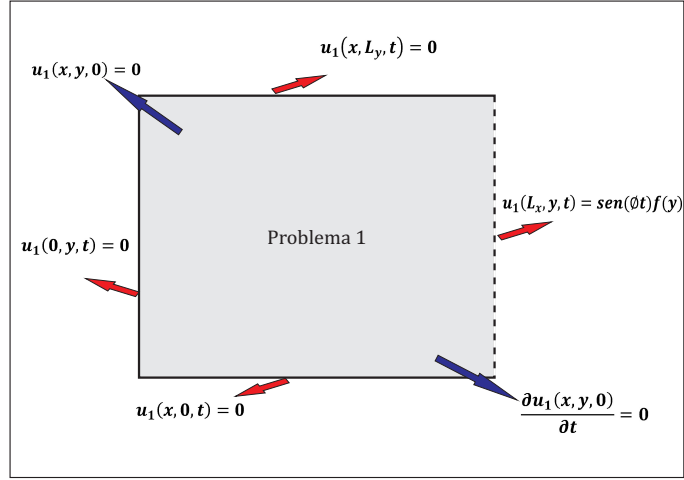


Figura 2.1: Condições iniciais e de contorno do Problema 1 (Eq.(2.1)-(2.8))

com

$$\lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_x}\right)^2}, \quad (2.11)$$

$$B_{m,n}^* = \frac{4}{\lambda_{m,n} L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g_1(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy, \quad (2.12)$$

$$g_1(x, y) = -\frac{\phi}{L_x} x f(y), \quad (2.13)$$

e $v_{m,n}^b(x, y, t)$ definido por

$$v_{m,n}^b(x, y, t) = B_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.14)$$

onde

$$B_{m,n}(t) = A_1 \sin(zt) + \frac{\sin(\phi t) b_1}{L_x(z^2 - \phi^2)}, \quad (2.15)$$

$$z^2 = \left(\frac{cm\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{cn\pi}{L_y}\right)^2, \quad (2.16)$$

$$A_1 = -\frac{\phi b_1}{z L_x(z^2 - \phi^2)}, \quad (2.17)$$

$$b_1 = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} s(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy, \quad (2.18)$$

$$s(x, y) = x \left(c^2 f''(y) + \phi^2 f(y) \right), \quad (2.19)$$

como iremos demonstrar adiante.

Uma solução fraca, considerando agora a função quadrática $f(y)$ dada pela equação

$$f(y) = y(y - L_y), \quad (2.20)$$

com $y \in [0, L_y]$, é dada por

$$u_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^a(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^b(x, y, t) + \frac{\sin(\phi t)}{L_x} xy(y - L_y), \quad (2.21)$$

com $v_{m,n}^a(x, y, t)$ dada pela Eq.(2.10), onde $B_{m,n}^*$ é

$$B_{m,n}^* = \frac{4\alpha_1\beta_1}{L_x L_y \lambda_{m,n}}, \quad (2.22)$$

com α_1 e β_1 definidos por

$$\alpha_1 = \frac{-L_x^2 \pi m (-1)^m}{(\pi m)^2}, \quad (2.23)$$

e

$$\beta_1 = \left(\frac{-\phi}{L_x} \right) \left(\frac{L_y^3 (2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3} \right), \quad (2.24)$$

e $v_{m,n}^b(x, y, t)$ definido pela Eq.(2.14), onde b_1 é

$$b_1 = \frac{4\alpha_1(\gamma_1 + \xi_1)}{L_x L_y}, \quad (2.25)$$

com α_1 dado pela Eq.(2.23), e γ_1, ξ_1 definidos por

$$\gamma_1 = \phi^2 \frac{L_y^3 (2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3}, \quad (2.26)$$

$$\xi_1 = 2c^2 \frac{L_y (1 - (-1)^n)}{\pi n}. \quad (2.27)$$

2.2 Problema 2: Condição de Neumann

Este segundo problema foi caracterizado como Condição de Neumann por causa da condição dada pela Eq.(2.32), apesar de haver condições de Dirichlet. A definição do Problema 2 é dada da seguinte maneira: encontrar $u_2(x, y, t)$ que satisfaz

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right), \quad [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, T] \quad (2.28)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$u_2(x = 0, y, t) = 0, \quad (2.29)$$

$$u_2(x, y = 0, t) = 0, \quad (2.30)$$

$$u_2(x, y = L_y, t) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u_2(x = L_x, y, t)}{\partial x} = \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (2.32)$$

com

$$f(0) = f(L_y) = 0, \text{ (Condição de Compatibilidade)} \quad (2.33)$$

$$u_2(x, y, t = 0) = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u_2(x, y, t = 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.35)$$

A figura (2.2) ilustra as condições iniciais (seta azul) e de contorno (seta vermelha) do Problema 2 descrito acima. Note que a condição de contorno aplicada

em $x = L_x$ foi modificada neste problema, com uma condição de Neumann dada pela Eq. (2.32).

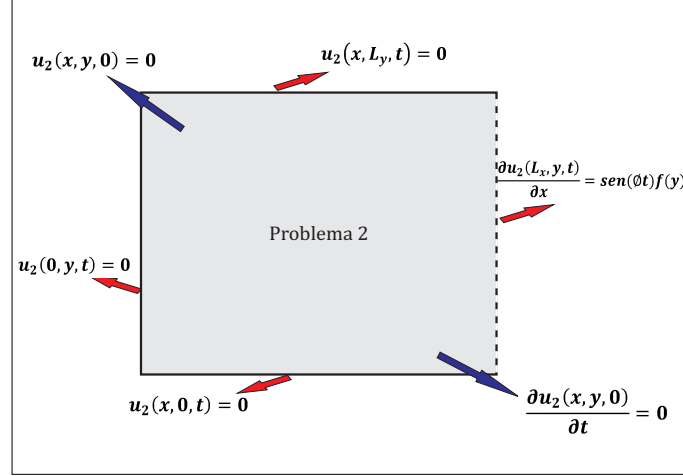


Figura 2.2: Condições iniciais e de contorno do Problema 2 (Eq.(2.28)-(2.35))

Uma solução fraca para este problema, considerando a função $f(y)$ genérica, é dada pela equação

$$u_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^a(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^b(x, y, t) + x \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (2.36)$$

onde $v_{m,n}^a(x, y, t)$ é definido por

$$v_{m,n}^a(x, y, t) = B_{m,n}^* \text{sen}(\lambda_{m,n} t) \text{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (2.37)$$

com

$$\lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2L_x} \right)^2}, \quad (2.38)$$

$$B_{m,n}^* = \frac{4}{\lambda_{m,n} L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g_2(x, y) \text{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, \quad (2.39)$$

$$g_2(x, y) = -\phi x f(y), \quad (2.40)$$

e $v_{m,n}^b(x, y, t)$ é definido por

$$v_{m,n}^b(x, y, t) = B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (2.41)$$

onde

$$B_{m,n}(t) = A_2 \operatorname{sen}(zt) + \frac{\operatorname{sen}(\phi t) b_2}{z^2 - \phi^2}, \quad (2.42)$$

$$z^2 = \left(\frac{c(2m-1)\pi}{2L_x} \right)^2 + \left(\frac{cn\pi}{L_y} \right)^2, \quad (2.43)$$

$$A_2 = -\frac{\phi b_2}{z(z^2 - \phi^2)}, \quad (2.44)$$

$$b_2 = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} s(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, \quad (2.45)$$

$$s(x, y) = x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (2.46)$$

como será demonstrado adiante.

Uma solução fraca, considerando agora a função $f(y)$ quadrática dada pela equação

$$f(y) = y(y - L_y), \quad (2.47)$$

com $y \in [0, L_y]$, é dada por

$$u_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^a(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}^b(x, y, t) + \operatorname{sen}(\phi t) xy(y - L_y), \quad (2.48)$$

com $v_{m,n}^a(x, y, t)$ dada pela Eq. (2.37), onde $B_{m,n}^*$ é

$$B_{m,n}^* = \frac{4\alpha_2 \beta_2}{L_x L_y \lambda_{m,n}}, \quad (2.49)$$

com α_2 e β_2 definidos por

$$\alpha_2 = \frac{-4L_x^2(-1)^m}{(\pi - 2\pi m)^2}, \quad (2.50)$$

$$\beta_2 = -\phi \left(\frac{L_y^3(2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3} \right), \quad (2.51)$$

e $v_{m,n}^b(x, y, t)$ definido pela Eq. (2.41), onde b_2 é

$$b_2 = \frac{4\alpha_2(\gamma_2 + \xi_2)}{L_x L_y}, \quad (2.52)$$

com α_2 dado pela Eq.(2.50), e γ_2, ξ_2 definidos por

$$\gamma_2 = \phi^2 \frac{L_y^3(2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3}, \quad (2.53)$$

e

$$\xi_2 = 2c^2 \frac{L_y(1 - (-1)^n)}{\pi n}. \quad (2.54)$$

Tanto para o Problema 1 definido pelas Eq.(2.1)-(2.8), quanto para o Problema 2 definido pelas Eq.(2.28)-(2.35), o valor de $c > 0$ representa a velocidade de propagação da onda, L_x e L_y são os comprimentos do domínio espacial retangular em x e y , respectivamente, T é o comprimento do domínio temporal em t e ϕ é a frequência de excitação aplicada em $x = L_x$, quando y e t variam. Observe que, para diferentes funções $f(y)$ prescritas, teremos diferentes valores dos coeficientes $B_{m,n}^*$, b_1 e b_2 nos problemas definidos acima.

3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

3.1 Solução Analítica: Problema 1

A técnica da Separação de Variáveis não pode ser aplicada diretamente ao Problema 1 descrito pelas equações (2.1)-(2.5), por causa da condição de contorno dependente do tempo dada pela Eq.(2.5). Assim, é necessário transformar o Problema 1 em um problema equivalente com condições de contorno independentes do tempo. Isto pode ser feito escrevendo-se a solução na forma [12]

$$u_1(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t), \quad (3.1)$$

onde

$$w(x, y, t) = \frac{x}{L_x} \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (3.2)$$

e $v(x, y, t)$ é uma função que iremos determinar. As derivadas parciais de ordem 2 com relação a x, y e t da Eq.(3.1) são dadas por

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\phi^2}{L_x} x \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{x \text{sen}(\phi t)}{L_x} f''(y). \quad (3.5)$$

Substituindo $u_1(x, y, t)$ nas condições iniciais e de contorno dadas pelas Eq.(2.2)-(2.5), temos

$$u_1(0, y, t) = 0 = v(0, y, t) + 0 \Rightarrow v(0, y, t) = 0, \quad (3.6)$$

$$u_1(x, 0, t) = 0 = v(x, 0, t) + \frac{x \sin(\phi t)}{L_x} f(0), \quad (3.7)$$

onde, aplicando a condição de compatibilidade dada pela Eq.(2.6), na Eq.(3.7), obtemos

$$v(x, 0, t) = 0, \quad (3.8)$$

$$u_1(x, L_y, t) = 0 = v(x, L_y, t) + \frac{x \sin(\phi t)}{L_x} f(L_y), \quad (3.9)$$

onde, aplicando mais uma vez a condição de compatibilidade na Eq.(3.9), obtemos

$$v(x, L_y, t) = 0, \quad (3.10)$$

$$u_1(x, y, t = 0) = 0 = v(x, y, 0) + 0 \Rightarrow v(x, y, 0) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u_1(x, y, 0)}{\partial t} = 0 = \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial t} + \frac{\phi x}{L_x} f(y) \Rightarrow \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial t} = g_1(x, y), \quad (3.12)$$

onde

$$g_1(x, y) = -\frac{\phi}{L_x} x f(y), \quad (3.13)$$

$$u_1(L_x, y, t) = \sin(\phi t) f(y) = v(L_x, y, t) + \frac{L_x}{L_x} \sin(\phi t) f(y) \Rightarrow v(L_x, y, t) = 0. \quad (3.14)$$

Observe que $f(y)$ deve ser escolhido de modo que $f(0) = f(L_y) = 0$, o que anula as Eq.(3.8) e Eq.(3.10), viabilizando a aplicação do método da Separação

de Variáveis. Observe também que a condição de contorno dada pela Eq.(2.5) que antes dependia do tempo, passa a ser independente do tempo após a substituição da Eq.(3.1) no Problema 1.

Substituindo agora a Eq.(3.1) na Eq.(2.1) e rearranjando os termos, obtemos

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\phi^2}{L_x} x \text{sen}(\phi t) f(y) \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{x \text{sen}(\phi t)}{L_x} f''(y) \right), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{c^2 x \text{sen}(\phi t)}{L_x} f''(y) + \frac{\phi^2 x \text{sen}(\phi t)}{L_x} f(y), \quad (3.16)$$

donde,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\text{sen}(\phi t)}{L_x} x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (3.17)$$

Observe que uma consequência da substituição da Eq.(3.1) na Eq.(2.1) foi o ganho de um termo adicional na Eq.(3.17), onde esse termo é definido por

$$\frac{\text{sen}(\phi t)}{L_x} x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (3.18)$$

Desta forma, a solução do Problema 1 pode ser obtida somando-se as soluções dos seguintes problemas

Problema 1-A

Encontrar $v^a(x, y, t)$ que satisfaça

$$\frac{\partial^2 v^a}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial y^2} \right), \quad (3.19)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$v^a(0, y, t) = 0, \quad (3.20)$$

$$v^a(x, 0, t) = 0, \quad (3.21)$$

$$v^a(x, L_y, t) = 0, \quad (3.22)$$

$$v^a(L_x, y, t) = 0, \quad (3.23)$$

$$v^a(x, y, 0) = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v^a(x, y, 0)}{\partial t} = g_1(x, y), \quad (3.25)$$

onde

$$g_1(x, y) = -\frac{\phi}{L_x} x f(y). \quad (3.26)$$

Problema 1-B

Encontrar $v^b(x, y, t)$ que satisfaça

$$\frac{\partial^2 v^b}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^b}{\partial y^2} \right) + \frac{\sin(\phi t)}{L_x} x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)), \quad (3.27)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$v^b(0, y, t) = 0, \quad (3.28)$$

$$v^b(x, 0, t) = 0, \quad (3.29)$$

$$v^b(x, L_y, t) = 0, \quad (3.30)$$

$$v^b(L_x, y, t) = 0, \quad (3.31)$$

$$v^b(x, y, 0) = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial v^b(x, y, t=0)}{\partial t} = 0. \quad (3.33)$$

Note que, o Problema 1-A leva em consideração todas as condições iniciais e de contorno, após a substituição da Eq.(3.1), porém desconsidera o termo adicional dado pela Eq.(3.18). Já o Problema 1-B considera a equação diferencial, com o referido termo adicional, mas homegeiniza a condição inicial da Eq.(3.12), que é dada pela Eq.(3.33).

3.1.1 Solução do Problema 1-A

A solução geral do Problema 1-A pode ser obtida pelo método da Separação de Variáveis [12, 8, 5]. Dividiremos a resolução do Problema 1-A em 3 passos descritos da seguinte forma

- **Passo 1:** Neste primeiro passo, pelo método da Separação de Variáveis, iremos tomar $v^a(x, y, t) = F(x, y)G(t)$ para obter de (3.19) uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) para $G(t)$ e uma Equação Diferencial Parcial (EDP) para $F(x, y)$. Em seguida, aplicando novamente o método da Separação de Variáveis, tomaremos $F(x, y) = H(x)Q(y)$ para obter mais duas EDO, uma para $H(x)$ e outra para $Q(x)$.
- **Passo 2:** Neste passo, iremos determinar as soluções das três EDO encontradas no passo anterior que satisfazem as condições de contorno do Problema 1-A.
- **Passo 3:** Para finalizar, neste último passo utilizaremos a Série Dupla de Fourier para compor as soluções encontradas no passo 2 para obter a solução do problema dado pelas Eq.(3.19)-(3.25) e encontrar a solução do Problema 1-A.

3.1.1.1 Passo 1

Escrevendo-se

$$v^a(x, y, t) = F(x, y)G(t), \quad (3.34)$$

e substituindo a Eq.(3.34) na Eq.(3.19), obtemos

$$FG'' = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G), \quad (3.35)$$

$$\frac{G''}{Gc^2} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}), \quad (3.36)$$

onde F_{xx} e F_{yy} são as derivadas parciais de ordem 2 com relação as variáveis x e y , respectivamente. Como o primeiro membro depende apenas de t e o segundo membro é independente de t , ambos os membros precisam ser constantes. Já sabemos que apenas valores negativos desta constante nos leva a soluções que satisfazem $v^a(x, y, t) = 0$, $(x, y) \in \Gamma$, onde $v^a(x, y, t)$ não é identicamente nula [8]. Portanto,

$$\frac{G''}{c^2 G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -r^2, \quad (3.37)$$

onde r é uma constante.

Com isso obtemos,

- **Função do Tempo**

$$G''(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad (3.38)$$

onde $\lambda = cr$.

- **Função de Amplitude (Equação de Helmholtz)**

$$F_{xx} + F_{yy} + r^2 F = 0. \quad (3.39)$$

Método da Separação de Variáveis Aplicado à Equação de Helmholtz

Escrevendo-se

$$F(x, y) = H(x)Q(y), \quad (3.40)$$

e substituindo a Eq.(3.40) na Eq.(3.39), obtemos

$$H''Q + HQ'' + r^2HQ = 0, \quad (3.41)$$

$$H''Q = -(HQ'' + r^2HQ), \quad (3.42)$$

rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{H''}{H} = -\frac{1}{Q}(Q'' + r^2Q). \quad (3.43)$$

Ambos os membros precisam ser constantes, onde essa constante é negativa [8] , isto é,

$$\frac{H''}{H} = -\frac{1}{Q}(Q'' + r^2Q) = -k^2, \quad (3.44)$$

onde k é uma constante. Com isso, obtemos

- Uma EDO para $H(x)$

$$H''(x) + k^2H(x) = 0, \quad (3.45)$$

- Uma EDO para $Q(y)$

$$Q''(y) + p^2Q(y) = 0, \quad (3.46)$$

com $p^2 = r^2 - k^2$.

Com isso terminamos o Passo 1.

3.1.1.2 *Passo 2*

As soluções da Eq.(3.45) e da Eq.(3.46) são dadas por [8]

$$H(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (3.47)$$

$$Q(y) = C \cos(py) + D \operatorname{sen}(py). \quad (3.48)$$

Como $F(x, y) = H(x)Q(y)$, das condições de contorno, obtemos as seguintes equações

- Da Eq.(3.20), temos:

$$v^a(0, y, t) = F(0, y)G(t) = 0 \Rightarrow F(0, y) = H(0)Q(y) \Rightarrow H(0) = 0, \quad (3.49)$$

- Da Eq.(3.23), temos:

$$v^a(L_x, y, t) = F(L_x, y)G(t) = 0 \Rightarrow F(L_x, y) = H(L_x)Q(y) \Rightarrow H(L_x) = 0, \quad (3.50)$$

- Da Eq.(3.21), temos:

$$v^a(x, 0, t) = F(x, 0)G(t) = 0 \Rightarrow F(x, 0) = H(x)Q(0) \Rightarrow Q(0) = 0, \quad (3.51)$$

- Da Eq.(3.22), temos:

$$v^a(x, L_y, t) = F(x, L_y)G(t) = 0 \Rightarrow F(x, L_y) = H(x)Q(L_y) \Rightarrow Q(L_y) = 0. \quad (3.52)$$

Substituindo a Eq.(3.49) e a Eq.(3.50) na Eq.(3.47), obtemos

$$H(0) = A = 0 \Rightarrow H(x) = B \operatorname{sen}(kx), \quad (3.53)$$

$$H(L_x) = B \operatorname{sen}(kL_x) = 0. \quad (3.54)$$

Note que precisamos tomar valores de B de modo que $B \neq 0$, pois caso contrário, $F(x, y)$ seria nula e, conseqüentemente, teríamos $v(x, y, t)$ identicamente nula, o que não é interessante. Assim, como $B \operatorname{sen}(kL_x) = 0$ e $B \neq 0$, devemos ter

$$\operatorname{sen}(kL_x) = 0 \Rightarrow kL_x = m\pi \Rightarrow k = \frac{m\pi}{L_x}, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.55)$$

De modo análogo, substituindo a Eq.(3.51) e a Eq.(3.52) na Eq.(3.48), obtemos

$$p = \frac{n\pi}{L_y}, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.56)$$

Em particular, para $B = 1$ e $D = 1$, obtemos

$$H_m(x) = \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right), \quad (3.57)$$

$$Q_n(y) = \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.58)$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$.

Portanto,

$$F_{m,n}(x, y) = \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

3.1.1.3 Autofunções e Autovalores

Uma vez que tomamos $p^2 = r^2 - k^2$ na Eq.(3.46) e $\lambda = cr$ na Eq.(3.38), temos da Eq.(3.55) e Eq.(3.56) que

$$r^2 = \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 \right], \quad (3.60)$$

$$r = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_x} \right)^2}, \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{\lambda}{c} \right) = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_x} \right)^2} \Rightarrow \lambda = \lambda_{n,m} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_x} \right)^2}. \quad (3.62)$$

Com isso, o valor de $\lambda_{n,m}$ fica bem definido em função de m e n . A solução da Função do Tempo, dada pela Eq.(3.38), é [8]

$$G_{m,n}(t) = B_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + B_{m,n}^* \sin(\lambda_{m,n}t). \quad (3.63)$$

Portanto, como $v^a(x, y, t) = v_{m,n}^a(x, y, t) = F_{m,n}(x, y, t)G_{m,n}(t)$, temos

$$v_{m,n}^a(x, y, t) = (B_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + B_{m,n}^* \sin(\lambda_{m,n}t)) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right). \quad (3.64)$$

Estas funções são chamadas de **Autofunções** ou **Funções Características**, e os valores que $\lambda_{m,n}$ assume são chamados de **Autovalores** ou **Valores Característicos** [8]. Iremos agora determinar $B_{m,n}$ e $B_{m,n}^*$ através das condições iniciais dada pela Eq.(3.24) e Eq.(3.25).

3.1.1.4 Passo 3

Se a Eq.(3.64) satisfaz a Eq.(3.19) e $v(x, y, t) = 0, \forall (x, y) \in \Gamma$, então

$$v^a(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n}(x, y, t), \quad (3.65)$$

também satisfaz (Princípio da Superposição) [3].

Aplicando a condição inicial dada pela Eq.(3.24) na Eq.(3.65), temos,

$$v^a(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) = 0 = f(x, y), \quad (3.66)$$

supondo que $f(x, y)$ exista. Assim, a Eq.(3.66) é a *Série Dupla de Fourier de senos* que representa $f(x, y)$. Vamos agora determinar os coeficientes da série. Suponha que $K_m(y)$ seja definido por

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right). \quad (3.67)$$

Assim, substituindo $K_m(y)$ na Eq.(3.66), obtemos

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right). \quad (3.68)$$

Se y é fixado, então a Eq.(3.68) é a *Série Dupla de Fourier de senos* de $f(x, y)$, considerado como uma função de x apenas. Logo, seus coeficientes são

$$K_m(y) = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f(x, y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) dx. \quad (3.69)$$

Note que Eq.(3.67) é a *Série de Fourier de senos* para $K_m(y)$. Logo, seus coeficientes são

$$B_{m,n} = \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} K_m(y) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dy. \quad (3.70)$$

Substituindo a Eq.(3.69) na Eq.(3.70), obtemos a *Formula Generalizada de Euler*

$$B_{m,n} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, m, n = 1, 2, \dots \quad (3.71)$$

para os Coeficientes de Fourier de $F(x, y)$.

De modo análogo, aplicando a condição inicial dada pela Eq.(3.25) na Eq.(3.65), obtemos

$$\frac{\partial v^a}{\partial t}(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^* \lambda_{m,n} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) = -\frac{\phi}{L_y} x f(y) = g_1(x, y). \quad (3.72)$$

Assim, os coeficientes da Série de Fourier de $g_1(x, y)$ são

$$B_{m,n}^* = \frac{4}{\lambda_{m,n} L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g_1(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, m, n = 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

Finalmente, a solução do Problema 1-A é dada por

$$v^a(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{m,n} \cos(\lambda_{m,n} t) + B_{m,n}^* \operatorname{sen}(\lambda_{m,n} t)) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.74)$$

com $B_{m,n}$ dado pela Eq.(3.71), $B_{m,n}^*$ dado pela Eq.(3.73) e $\lambda_{m,n}$ dado pela Eq.(3.62).

Note que $B_{m,n} = 0$, pois $f(x, y) = 0$, mas $B_{m,n}^* \neq 0$ uma vez que $g_1(x, y) \neq 0$.

3.1.2 Solução do Problema 1-B

Das condições de contorno dadas pelas Eq.(3.28)-(3.31), sabemos que $v^b(x, y, t)$ deve se anular em $(x, y) \in \Gamma, \forall t$. Assim, o Problema 1-B pode ser resolvido escrevendo-se $v^b(x, y, t)$ como uma *Série Dupla de Fourier de senos*, isto é

$$v^b(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.75)$$

onde $B_{m,n}(t)$ será determinado. Os termos que relacionam a função cosseno já foram descartados, uma vez que eles violam as condições de contorno.

Do Problema 1-B, temos que o termo adicional da Eq.(3.27) é dado por

$$\frac{\operatorname{sen}(\phi t)}{L_x} s(x, y), \quad (3.76)$$

onde $s(x, y)$ é dado por

$$s(x, y) = x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (3.77)$$

Note que podemos reescrever (3.76) como uma *Série Dupla de Fourier de senos*, isto é,

$$\frac{\operatorname{sen}(\phi t)}{L_x} s(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(\phi t)}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.78)$$

onde

$$b_1 = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} s(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy. \quad (3.79)$$

As derivadas parciais de ordem 2 com relação a x, y e t de (3.75) são dadas por

$$\frac{\partial^2 v^b}{\partial t^2}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B''_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^2 v^b}{\partial x^2}(x, y, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2, \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial^2 v^b}{\partial y^2}(x, y, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2, \quad (3.82)$$

Substituindo agora as Eq.(3.75) e Eq.(3.78) na Eq.(3.27), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^b}{\partial t^2}(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B''_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \\ &= -c^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \\ &\quad - c^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen}(\phi t)}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_1 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Rearranjando os termos obtemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \left(B''_{m,n}(t) + z^2 B_{m,n}(t) - \frac{\operatorname{sen}(\phi t)}{L_x} b_1 \right) = 0, \quad (3.84)$$

onde

$$z^2 = \left(\frac{cm\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{cn\pi}{L_y} \right)^2. \quad (3.85)$$

Como a Eq.(3.84) deve se anular para $m, n = 1, 2, \dots$, temos que

$$B''_{m,n}(t) + z^2 B_{m,n}(t) - \frac{\text{sen}(\phi t)}{L_x} b_1 = 0. \quad (3.86)$$

A solução da EDO acima   dada por [8]

$$B_{m,n}(t) = A_2 \cos(zt) + A_1 \text{sen}(zt) + \frac{\text{sen}(\phi t) b_1}{L_x(z^2 - \phi^2)}. \quad (3.87)$$

Aplicando a condição inicial da Eq.(3.32) do Problema 1-B na solução dada pela Eq.(3.75), obtemos

$$v^b(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) B_{m,n}(0) = 0. \quad (3.88)$$

Com isso, $B_{m,n}(0) = 0$. Logo,

$$B_{m,n}(0) = A_2 = 0, \quad (3.89)$$

e, portanto,

$$B_{m,n}(t) = A_1 \text{sen}(zt) + \frac{\text{sen}(\phi t) b_1}{z^2 L_x - L_x \phi^2}. \quad (3.90)$$

Aplicando a condição inicial da Eq.(3.33) na solução dada pela Eq.(3.75), obtemos

$$\frac{\partial v^b}{\partial t}(x, y, t = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) B'_{m,n}(0) = 0. \quad (3.91)$$

Com isso, $B'_{m,n}(0) = 0$. Logo,

$$B'_{m,n}(0) = 0 + A_1 \cos(0)z + \frac{\phi \cos(0) b_1}{L_x(z^2 - \phi^2)} = 0, \quad (3.92)$$

o que nos dá

$$A_1 = -\frac{\phi b_1}{z L_x (z^2 - \phi^2)}. \quad (3.93)$$

Finalmente, a solução do Problema 1-B é dado pela Eq.(3.75), onde o coeficiente $B_{m,n}(t)$ é descrito pela Eq.(3.90), com A_2 dado pela Eq.(3.93).

3.1.3 Solução do Problema 1 para f_y Quadrático

Adotando

$$f(y) = y(y - L_y), \quad (3.94)$$

iremos calcular os coeficientes $B_{m,n}^*$ e b_1 do Problema 1. Pela formulação do problema, a função $f(x, y) = 0$ e, conseqüentemente, o valor do coeficiente $B_{m,n}$ é nulo. Assim, temos que $g_1(x, y)$ e $s(x, y)$ definidas, respectivamente, nas Eq.(2.13) e Eq.(2.19), são

$$g_1(x, y) = \left(-\frac{\phi}{L_x}\right) x f(y) = \left(-\frac{\phi}{L_x}\right) x y (y - L_y), \quad (3.95)$$

$$s(x, y) = x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)) = x (2c^2 + \phi^2 y (y - L_y)). \quad (3.96)$$

A integral dupla do coeficiente $B_{m,n}^*$ do Problema 1 dado pela Eq.(3.73) pode ser reduzida ao cálculo da seguinte equação:

$$B_{m,n}^* = \frac{4\alpha_1 \beta_1}{L_x L_y \lambda_{m,n}}, \quad (3.97)$$

onde α_1 é dado por

$$\alpha_1 = \int_0^{L_x} x \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx, \quad (3.98)$$

e β_1 é dado por

$$\beta_1 = -\frac{\phi}{L_x} \int_0^{L_y} y(y - L_y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy, \quad (3.99)$$

com $\lambda_{m,n}$ definido na Eq.(3.62). De modo análogo ao cálculo de $B_{m,n}^*$, podemos calcular a integral dupla do coeficiente b_1 do Problema 1-B dado pela Eq.(3.79) da seguinte forma:

$$b_1 = \frac{4\alpha_1(\gamma_1 + \xi_1)}{L_x L_y}, \quad (3.100)$$

onde α_1 é dado pela Eq.(3.98), γ_1 e ξ_1 dados, respectivamente, por

$$\gamma_1 = \phi^2 \int_0^{L_y} y(y - L_y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy, \quad (3.101)$$

e

$$\xi_1 = 2c^2 \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy. \quad (3.102)$$

Portanto, para $f(y)$ quadrático, os valores de α_1 , β_1 , γ_1 e ξ_1 dados em função de m e n são

$$\alpha_1 = \frac{-L_x^2 \pi m (-1)^m}{(\pi m)^2}, \quad (3.103)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{-\phi}{L_x}\right) \left(\frac{L_y^3 (2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3}\right), \quad (3.104)$$

$$\gamma_1 = \phi^2 \frac{L_y^3 (2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3}, \quad (3.105)$$

$$\xi_1 = 2c^2 \frac{L_y (1 - (-1)^n)}{\pi n}. \quad (3.106)$$

Com isso, os coeficientes $B_{m,n}^*$ e b_1 podem ser calculados utilizando, respectivamente, as Eq.(3.97) e Eq.(3.100). Assim, obtemos a solução do Problema 1 para $f(y)$ quadrático.

3.2 Solução Analítica: Problema 2

Assim como no Problema 1, a condição da Eq.(2.32) invalida a aplicação da técnica da Separação de Variáveis. A transformação que valida a aplicação da técnica pode ser feita escrevendo-se a solução na forma [12]

$$u_2(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t), \quad (3.107)$$

onde

$$w(x, y, t) = x \text{sen}(\phi t) f(y), \quad (3.108)$$

e $v(x, y, t)$ é uma função que iremos determinar. Substituindo a Eq.(3.107) na condição inicial dada pela Eq.(2.35) e na condição de contorno dada pela Eq.(2.32), obtemos

$$\frac{\partial u_2(x, y, 0)}{\partial t} = 0 = \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial t} + \phi x f(y) \Rightarrow \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial t} = g_2(x, y), \quad (3.109)$$

onde

$$g_2(x, y) = -\phi x f(y), \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial u_2(L_x, y, t)}{\partial x} = \text{sen}(\phi t) f(y) = \frac{\partial v(L_x, y, t)}{\partial x} + \text{sen}(\phi t) f(y) \quad (3.111)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v(L_x, y, t)}{\partial x} = 0$$

De modo análogo ao Problema 1, a substituição da Eq.(3.107) nas condições das Eq.(2.29)-(2.34), resultam nas seguintes condições:

$$v(0, y, t) = 0, \quad (3.112)$$

$$v(x, 0, t) = 0, \quad (3.113)$$

$$v(x, L_y, t) = 0, \quad (3.114)$$

$$v(x, y, 0) = 0. \quad (3.115)$$

Substituindo agora a Eq.(3.107) na Equação Diferencial do Problema 2 dada pela Eq.(2.28) e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \text{sen}(\phi t)x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (3.116)$$

Observe que, assim como no Problema 1, uma consequência da substituição da Eq.(3.107) na Eq.(2.28) foi o ganho de um termo adicional na Eq.(3.116), onde esse termo é definido por

$$\text{sen}(\phi t)x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)). \quad (3.117)$$

Desta forma, a solução do problema 2 pode ser obtido somando-se as soluções dos seguintes problemas:

Problema 2-A

Encontrar $v^a(x, y, t)$ que satisfaça

$$\frac{\partial^2 v^a}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial y^2} \right), \quad (3.118)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$v^a(0, y, t) = 0, \quad (3.119)$$

$$v^a(x, 0, t) = 0, \quad (3.120)$$

$$v^a(x, L_y, t) = 0, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial v^a(L_x, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.122)$$

$$v^a(x, y, 0) = 0, \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial v^a(x, y, 0)}{\partial t} = g_2(x, y), \quad (3.124)$$

com

$$g_2(x, y) = -\phi x f(y). \quad (3.125)$$

Problema 2-B

Encontrar $v^b(x, y, t)$ que satisfaça

$$\frac{\partial^2 v^b}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^b}{\partial y^2} \right) + \sin(\phi t) x (c^2 f''(y) + \phi^2 f(y)), \quad (3.126)$$

com condições de contorno e iniciais dadas pelas equações

$$v^b(0, y, t) = 0, \quad (3.127)$$

$$v^b(x, 0, t) = 0, \quad (3.128)$$

$$v^b(x, L_y, t) = 0, \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial v^b(L_x, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.130)$$

$$v^b(x, y, 0) = 0, \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial v^b(x, y, t=0)}{\partial t} = 0. \quad (3.132)$$

Note que, de modo análogo ao Problema 1-A, o Problema 2-A leva em consideração todas as condições iniciais e de contorno, após a substituição da Eq.(3.107), porém desconsidera o termo adicional dado pela Eq.(3.117). Já o Problema 2-B considera a equação diferencial, com o referido termo adicional, mas homegeiniza a condição inicial dada pela Eq.(3.109), que é dada pela Eq.(3.132).

3.2.1 Solução do Problema 2-A

De modo análogo ao Problema 1-A, iremos seguir os 3 passos definidos na Subseção 3.1.1 para encontrar a solução do Problema 2-A.

3.2.1.1 Passo 1

Escrevendo-se

$$v^a(x, y, t) = F(x, y)G(t), \quad (3.133)$$

e substituindo a Eq.(3.133) na Eq.(3.118), obtemos

$$\frac{G''}{Gc^2} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}), \quad (3.134)$$

onde F_{xx} e F_{yy} são as derivadas parciais de ordem 2 com relação as variáveis x e y , respectivamente. Assim como no problema 1, pela técnica da Separação de Variáveis, obtemos as seguintes equações:

- **Função do Tempo**

$$G''(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad (3.135)$$

onde $\lambda = cr$.

- **Função de Amplitude (Equação de Helmholtz)**

$$F_{xx} + F_{yy} + r^2 F = 0. \quad (3.136)$$

Aplicando mais uma vez o método da Separação de Variáveis na **Equação de Helmholtz**, reescrevendo-se $F(x, y) = H(x)Q(y)$, obtemos as seguintes equações:

$$H(x)'' + k^2 H(x) = 0, \quad (3.137)$$

$$Q(y)'' + p^2 Q(y) = 0, \quad (3.138)$$

com $p^2 = r^2 - k^2$, onde r e k são constantes.

Com isso, finalizamos o *Passo 1* com as três EDO dadas pelas Eq.(3.135), Eq.(3.137) e Eq.(3.138).

3.2.1.2 *Passo 2*

A solução das EDO do *Passo 1* são dadas pelas seguintes equações: [8]

$$H(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (3.139)$$

$$Q(y) = C \cos(py) + D \sin(py). \quad (3.140)$$

Das condições dadas pelas Eq.(3.119), Eq.(3.120) e Eq.(3.121), utilizando as soluções das EDO, obtemos

$$H(0) = 0, \quad (3.141)$$

$$Q(0) = 0, \quad (3.142)$$

$$Q(L_y) = 0. \quad (3.143)$$

Entretando, substituindo agora a condição de contorno dada pela Eq.(3.122) na Eq.(3.133), obtemos

$$\frac{\partial v(L_x, y, t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(L_x, y)}{\partial x} G(t) = H'(L_x) Q(y) G(t) = 0 \Rightarrow H'(L_x) = 0. \quad (3.144)$$

Assim, aplicando as Eq.(3.142) e Eq.(3.143) na EDO dada pela Eq.(3.140), obtemos

$$p = \frac{n\pi}{L_y}, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.145)$$

Da Eq.(3.141), obtemos $A = 0$ na EDO dada pela Eq.(3.137) e aplicando a Eq.(3.144) na Eq.(3.139), obtemos

$$H'(L_x) = Bk \cos(kL_x) = 0 \Rightarrow k = \frac{(2m-1)\pi}{2L_x}, m = 1, 2, \dots \quad (3.146)$$

Portanto, as soluções das EDO em x e y são dadas pelas equações

$$Q_n(y) = \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.147)$$

$$H_m(x) = \text{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right). \quad (3.148)$$

3.2.1.3 Autofunções e Autovalores

Substituindo p e k dados pelas Eq.(3.145) e Eq.(3.146) em $p^2 = r^2 - k^2$, definidos nas EDO em x e y do *Passo 1*, obtemos

$$r = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2L_x} \right)^2}. \quad (3.149)$$

A solução da EDO em t dada pela Eq.(3.135) é dada por [8]

$$G_{m,n}(t) = B_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + B_{m,n}^* \text{sen}(\lambda_{m,n}t), \quad (3.150)$$

onde

$$\lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2L_x} \right)^2}. \quad (3.151)$$

Portanto, assim como no Problema 1-A, as soluções da Função do Tempo são chamadas de **Autofunções** ou **Funções Características**, e os valores que $\lambda_{m,n}$ assume são chamados de **Autovalores** ou **Valores Característicos** [8].

3.2.1.4 Passo 3

Utilizando os mesmos argumentos do *Passo 3* do Problema 1, podemos concluir que a solução do Problema 2-A é dado por

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) B_{m,n} \cos(\lambda_{m,n} t) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) B_{m,n}^* \operatorname{sen}(\lambda_{m,n} t), \end{aligned} \quad (3.152)$$

onde o coeficiente $B_{m,n}$ é dado por

$$B_{m,n} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.153)$$

e $B_{m,n}^*$ é dado por

$$B_{m,n}^* = \frac{4}{\lambda_{m,n} L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.154)$$

Os coeficientes da Eq.(3.153) e Eq.(3.154) podem ser obtidos com uma estratégia análoga ao Problema 1-A, partindo-se das condições iniciais da Eq.(3.123) e Eq.(3.124). Observe que, mais uma vez, $B_{m,n} = 0$, pois $f(x, y) = 0$, mas $B_{m,n}^* \neq 0$ uma vez que $g_2(x, y) = -x\phi f(y)$.

3.2.2 Solução do Problema 2-B

A solução do Problema 2-A pode ser escrita pela seguinte *Série Dupla de Fourier de senos*

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.155)$$

onde o coeficiente $B_{m,n}(t)$ será determinado. Assim como no Problema 1, os termos que relacionam a função cosseno também já foram descartados, já que eles violam as condições de contorno.

O termo adicional da Eq.(3.126) pode ser reescrito por

$$\operatorname{sen}(\phi t) s(x, y), \quad (3.156)$$

onde $s(x, y)$ é dado por

$$s(x, y) = x \left(c^2 f''(y) + \phi^2 f(y) \right). \quad (3.157)$$

Note que podemos reescrever a Eq.(3.156) como a seguinte *Série Dupla de Fourier de senos*, isto é,

$$\operatorname{sen}(\phi t) s(x, y) = \operatorname{sen}(\phi t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_2 \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right), \quad (3.158)$$

onde b_2 é dado por

$$b_2 = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} s(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dx dy. \quad (3.159)$$

Substituindo as Eq.(3.155) e Eq.(3.158) na Eq.(3.126) e rearranjando os termos, obtemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) (B''_{m,n}(t) + z^2 B_{m,n}(t) - \sin(\phi t) b_2) = 0, \quad (3.160)$$

onde, z^2 é definido por

$$z^2 = \left(\frac{c(2m-1)\pi}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{cn\pi}{L_y}\right)^2. \quad (3.161)$$

Neste ponto, com os mesmo argumentos utilizados no Problema 1-B, obtemos uma EDO em t dada por

$$B''_{m,n}(t) + z^2 B_{m,n}(t) - \sin(\phi t) b_2 = 0, \quad (3.162)$$

onde, utilizando as condições iniciais dadas pela Eq.(3.131) e Eq.(3.132) do Problema 2-B, sua solução é dada por

$$B_{m,n}(t) = A_1 \cos(z t) + A_2 \sin(z t) + \frac{\sin(\phi t) b_2}{z^2 - \phi^2}. \quad (3.163)$$

com $A_1 = 0$ e A_2 dado por

$$A_2 = -\frac{\phi b_2}{z(z^2 - \phi^2)}. \quad (3.164)$$

Com isso, encontramos a solução analítica do Problema 2.

3.2.3 Solução do Problema 2 para f_y Quadrático

Adotando

$$f(y) = y(y - L_y), \quad (3.165)$$

iremos calcular os coeficientes $B^*_{m,n}$ e b_2 do Problema 2. O valor do coeficiente $B_{m,n}$ também é nulo neste caso, já que, pela formulação do Problema 2, $f(x, y) = 0$. As funções $g_2(x, y)$ e $s(x, y)$ definidas, respectivamente, nas Eq.(2.40) e Eq.(2.46), são

$$g_2(x, y) = -\phi x y (y - L_y), \quad (3.166)$$

e

$$s(x, y) = x (2c^2 + \phi^2 y(y - L_y)). \quad (3.167)$$

A integral dupla do coeficiente $B_{m,n}^*$ dado pela Eq.(2.39) pode ser reduzida ao cálculo da seguinte equação:

$$B_{m,n}^* = \frac{4\alpha_2\beta_2}{L_x L_y \lambda_{m,n}}, \quad (3.168)$$

onde α_2 é dado por

$$\alpha_2 = \int_0^{L_x} x \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L_x} \right) dx, \quad (3.169)$$

e β_2 é dado por

$$\beta_2 = -\phi \int_0^{L_y} y(y - L_y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dy, \quad (3.170)$$

com $\lambda_{m,n}$ definido na Eq.(3.151). De modo análogo ao cálculo de $B_{m,n}^*$, podemos calcular a integral dupla do coeficiente b_2 do Problema 2 dado pela Eq.(3.159) da seguinte forma:

$$b_2 = \frac{4\alpha_2(\gamma_2 + \xi_2)}{L_x L_y}, \quad (3.171)$$

onde α_2 é dado pela Eq.(3.169), γ_2 e ξ_2 dados por

$$\gamma_2 = \phi^2 \int_0^{L_y} y(y - L_y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dy, \quad (3.172)$$

e

$$\xi_2 = (2c^2) \int_0^{L_y} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) dy. \quad (3.173)$$

Portanto, para $f(y)$ quadrático, os valores de α_2 , β_2 , γ_2 e ξ_2 dados em função de m e n são

$$\alpha_2 = \frac{-4L_x^2(-1)^m}{(\pi - 2\pi m)^2}, \quad (3.174)$$

$$\beta_2 = -\phi \left(\frac{L_y^3(2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3} \right), \quad (3.175)$$

$$\gamma_2 = \phi^2 \frac{L_y^3(2(-1)^n - 2)}{(\pi n)^3}, \quad (3.176)$$

$$\xi_2 = 2c^2 \frac{L_y(1 - (-1)^n)}{\pi n}. \quad (3.177)$$

Com isso, os coeficientes $B_{m,n}^*$ e b_2 podem ser calculados utilizando, respectivamente, as Eq.(3.168) e Eq.(3.171).

4 SOLUÇÃO APROXIMADA

Neste capítulo, iremos obter as soluções aproximadas dos Problemas 1 e 2 descritos no Capítulo 2, utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Posteriormente, essas soluções aproximadas serão comparadas com as soluções analíticas dos problemas para que seja feita uma análise com relação a precisão do método numérico em função da frequência de excitação ϕ .

A ideia geral do MDF consiste em discretizar o domínio e substituir as derivadas da equação diferencial por aproximações que envolvem apenas valores da função nos pontos da discretização. Quando o domínio tem mais de uma variável, essa ideia pode ser implementada para cada uma das variáveis separadamente [2].

Aplicando-se uma aproximação de diferença centrada [6] na Eq.(2.1) do Problema 1, obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, y, t + \Delta t) - 2u(x, y, t) + u(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \\ &= c^2 \left(\frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \right) \\ &+ c^2 \left(\frac{u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Isolando o valor de u no tempo $t + \Delta t$ e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
u(x, y, t + \Delta t) &= 2u(x, y, t) - u(x, y, t - \Delta t) \\
&+ \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t) \right) \\
&+ \left(\frac{c\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left(u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t) \right)
\end{aligned} \quad (4.2)$$

Tomando-se $u(x_i, y_j, t_k) = u_{i,j}^k$, para o valor aproximado de u no ponto (x_i, y_j, t_k) , onde o par (x_i, y_j) é um ponto do domínio espacial do problema e t_k um dado instante de tempo, a Eq.(4.2) pode ser reescrita por

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{k+1} &= 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k \right) \\
&+ \left(\frac{c\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left(u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k \right)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $k + 1 = t_k + \Delta t$.

A figura 4.1, ilustra uma discretização do domínio do problema com n pontos em x e m pontos em y . Já a figura 4.2, mostra outra discretização do domínio, porém ao longo dos tempos $t - \Delta t$, t e $t + \Delta t$.

Pela Eq.(4.3) e pela figura 4.2, percebe-se que para o cálculo de $u_{i,j}^{k+1}$, isto é, dos valores de u no tempo t_{k+1} , é necessário obter os valores de u no tempo t_k e t_{k-1} . Percebe-se também que, pela figura 4.2, o cálculo de um valor específico $u_{i,j}^{k+1}$ é feito com base nos valores de $u_{i+1,j}^k$, $u_{i-1,j}^k$, $u_{i,j+1}^k$, $u_{i,j-1}^k$ e $u_{i,j}^{k-1}$.

Assumindo $k_1 = 0$, pela condição inicial da Eq.(2.7), sabemos os valores de $u_{i,j}^{k_1}$. Para calcular $u_{i,j}^{k_1+1}$, é necessário obter agora os valores de $u_{i,j}^{k_1-1}$. Aplicando-se uma aproximação regressiva [6] na condição inicial da Eq.(2.8), obtemos

$$\frac{u_{i,j}^{k_1} - u_{i,j}^{k_1-1}}{\Delta t} = 0, \quad (4.4)$$

isto é, $u_{i,j}^{k_1-1} = u_{i,j}^{k_1}$. Com isso, podemos inicializar o método com a regra de atualização dada por (4.3), com $k = k_1$.

Para o Problema 2, a regra de atualização também é dada pela Eq.(4.3), tendo como ponto de partida $u_{i,j}^{k_1-1} = u_{i,j}^{k_1}$, assumindo $k_1 = 0$. Entretanto, na condição de contorno de Neumann dada pela Eq.(2.32), iremos aplicar uma aproximação de diferença regressiva [6] em x , isto é

$$\frac{u(L_x, y, t) - u(L_x - \Delta x, y, t)}{\Delta x} = \text{sen}(\phi)f(y). \quad (4.5)$$

Isolando os valores de u em $x = L_x$ e adotando a notação mais simplificada, obtemos

$$u_{m,j}^k = \Delta x \text{sen}(\phi)f(y) + u_{m-1,j}^k, \quad (4.6)$$

onde m é o número total de pontos da discretização do domínio em x , e k é um dado instante de tempo. Com isso, para a aproximação do Problema 2, além da regra de atualização dada pela Eq.(4.3), a atualização dos valores de u em $x = L_x$, quando y varia ao longo do tempo, é dada pela Eq.(4.6).

A condição de estabilidade do MDF para o caso da equação da onda bidimensional [9] pode ser obtida a partir da equação

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Em particular, neste trabalho, adotamos $\Delta x = \Delta y$, o que nos dá a seguinte regra de estabilidade

$$\Delta x \geq \Delta t c \sqrt{2}, \quad (4.8)$$

onde c é a velocidade de propagação da onda, Δt e Δx são os tamanhos dos passos em t e x , respectivamente.

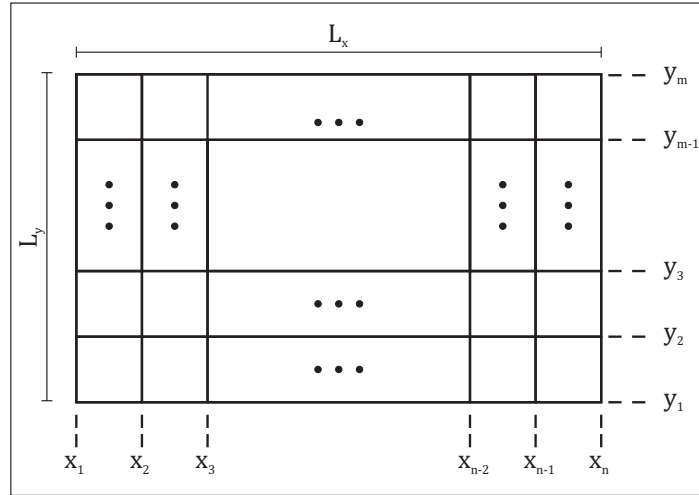


Figura 4.1: Exemplo de discretização do domínio com n pontos em x e m pontos em y

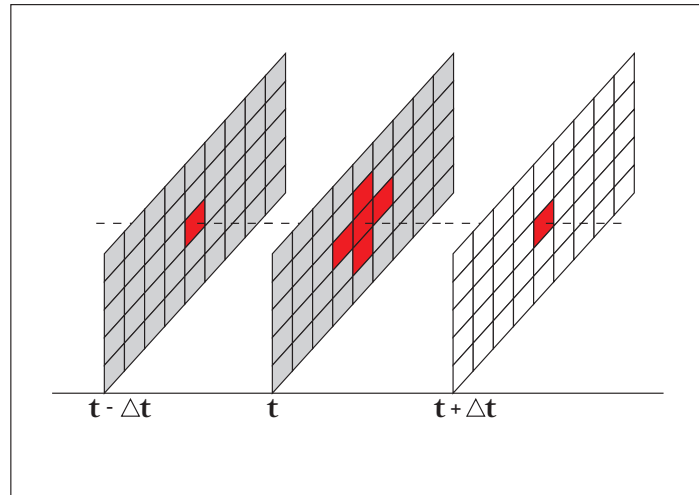


Figura 4.2: Exemplo de discretização do domínio ao longo dos tempos t , $t - \Delta t$ e $t + \Delta t$

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, iremos comparar as soluções analíticas dos problemas com as suas respectivas soluções aproximadas utilizando o MDF para alguns valores do parâmetro ϕ , que representa a frequências de excitação prescrita em $x = L_x$. Como já foi visto, a estratégia para a obtenção das soluções analíticas resume-se à soma da solução dos dois subproblemas A e B definidos nas Seções 3.1 e 3.2 para os Problemas 1 e 2, respectivamente. Os cálculos serão realizados para função $f(y)$ quadrática definida no Capítulo 3 para ambos os problemas.

Serão comparados ao longo do tempo o deslocamento u de dois pontos, um da solução analítica e o outro da solução aproximada, localizados na região central do domínio dos problemas. As frequências de excitação, isto é, os valores assumidos pelo parâmetro ϕ serão 10, 40 e 70. As configurações gerais em que os testes irão ser realizados para os problemas serão as seguintes

- **Velocidade de propagação da onda:** $c = 2$;
- **Comprimento do domínio em x:** $L_x = 1.5$;
- **Comprimento do domínio em y:** $L_y = 3$
- **Intervalo de tempo:** $t \in [0, 10]$

As soluções analíticas foram geradas truncando-se a Série de Fourier para $n = m = 70$. As soluções analíticas e aproximadas foram implementadas em MATLAB, onde os códigos encontram-se no Apêndice deste trabalho.

5.1 Convergência da Solução Aproximada

Iremos utilizar a solução analítica dos Problema 1 e 2, para o caso de $f(y)$ quadrático, descritas nas Subseções 3.1.3 e 3.2.3 do Capítulo 3 e compará-las com a aproximação via MDF para validar as soluções analíticas obtidas. No MDF, o valor de n_t representa o número de passos de tempo em que a solução aproximada é calculada. Quanto maior o valor de n_t , em um mesmo intervalo de tempo, menor será Δt e, portanto, melhor será a precisão [2]. Para as soluções aproximadas, utilizamos os seguintes valores de n_t : $n_t = 200$ ($\Delta t = 0.5$, $\Delta x = \Delta y = 0.1697$), $n_t = 800$ ($\Delta t = 0.125$, $\Delta x = \Delta y = 0.0424$) e $n_t = 3200$ ($\Delta t = 0.0031$, $\Delta x = \Delta y = 0.0106$).

5.1.1 Problema 1: Condição de Dirichlet

A figura 5.1 ilustra os deslocamentos da solução analítica e aproximadas do Problema 1 no ponto $x = \frac{L_x}{2}$ e $y = \frac{L_y}{2}$, com $\phi = 10$.

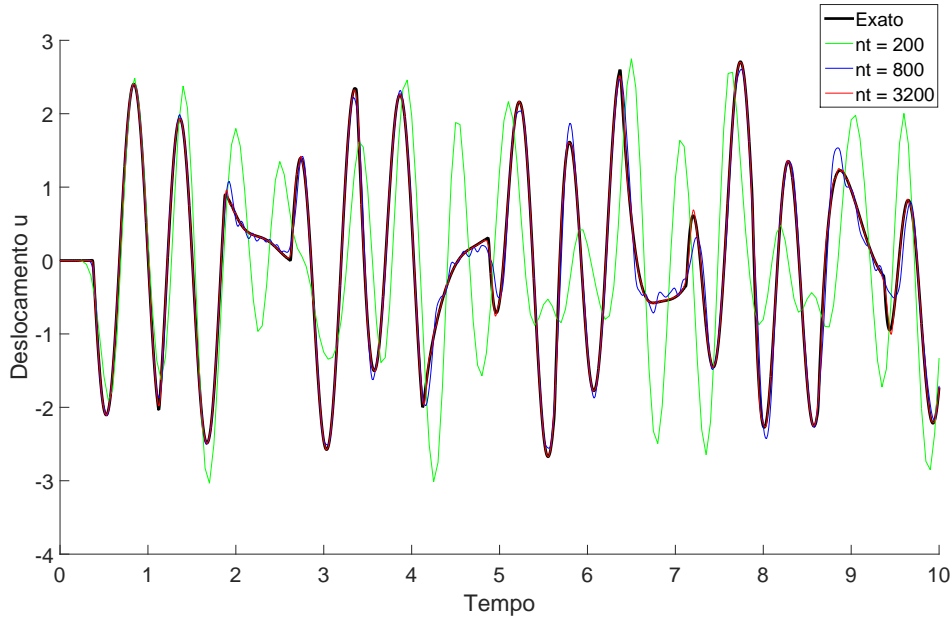


Figura 5.1: Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 1 para $\phi = 10$, com diferentes valores de n_t

Note que, conforme o valor de n_t aumenta, a aproximação converge para a solução analítica do Problema 1, o que demonstra que a solução analítica obtida está correta.

5.1.2 Problema 2: Condição de Neumann

A figura 5.2 representa os deslocamentos da solução analítica e aproximadas do problema 2 no ponto $x = \frac{L_x}{2}$ e $y = \frac{L_y}{2}$, com $\phi = 10$.

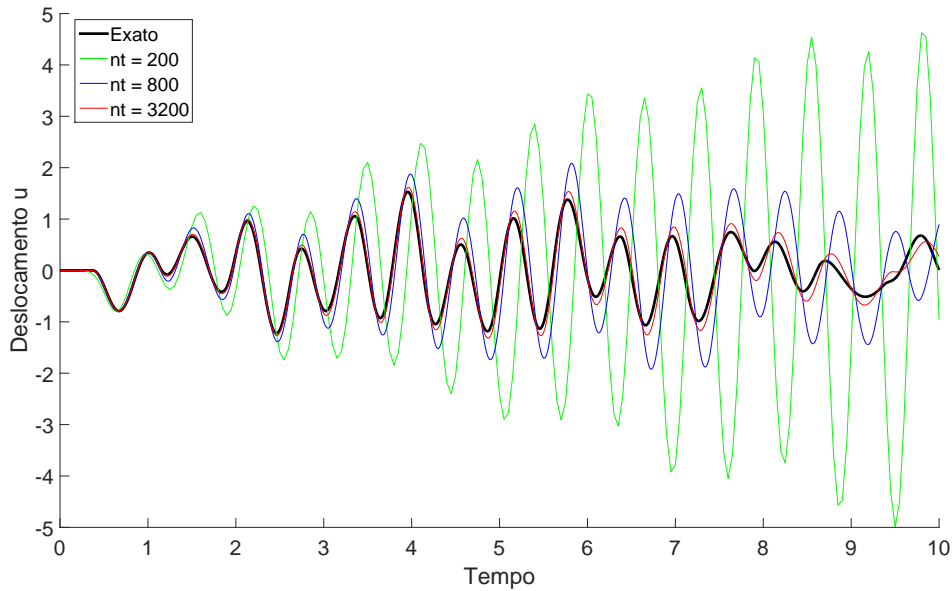


Figura 5.2: Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 2 para $\phi = 10$, com diferentes valores de n_t

Note que, assim como no Problema 1, a aproximação converge para a solução analítica do Problema 2 na medida em que o valor de nt aumenta, o que demonstra que a solução analítica obtida está correta.

5.2 Dificuldades Numéricas em Função do Parâmetro ϕ

Iremos utilizar a solução analítica dos Problemas 1 e 2, para o caso de $f(y)$ quadrático, descritas nas Subseções 3.1.3 e 3.2.3 do Capítulo 3 para compará-las com a aproximação do MDF, levando em consideração a frequências de excitação ϕ . Utilizaremos 3 valores distintos de ϕ para analisar o comportamento das soluções aproximadas. O valor de n_t será fixado em 3200, que foi considerado suficiente para garantir a convergência da solução aproximada.

5.2.1 Problema 1: Condição de Dirichlet

A figura 5.3 ilustra o deslocamento da solução analítica e aproximada do Problema 1 no ponto $x = \frac{L_x}{2}$ e $y = \frac{L_y}{2}$ para $\phi = 10, 40$ e 70 .

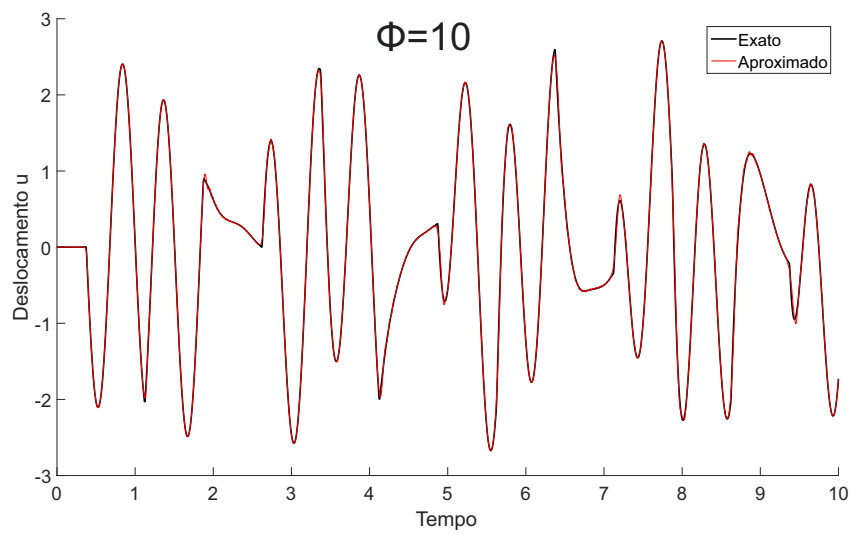
Perceba que, na medida em que o valor da frequência de excitação aumenta, a aproximação se distancia da solução analítica do problema, isto é, ajustando o parâmetro ϕ , podemos tornar, o quanto queiramos, o problema mais difícil de ser numericamente aproximado. Para demonstrar a eficácia da solução analítica do Problema 1, a figura (5.5) ilustra uma comparação da solução aproximada e analítica em todos os pontos do domínio, para o instante de tempo $t = 3$, com $n_t = 1000$ ($\Delta t = 0.003, \Delta x = \Delta y = 0.0102$), com $\phi = 10$.

Pela figura (5.5), podemos perceber que a convergência da solução aproximada se dá para os demais pontos do domínio, enfatizando que a solução analítica é bastante útil como suporte para testar métodos numéricos de alta precisão, tomando como artifício para dificultar a aproximação, o aumento da frequência de excitação ϕ .

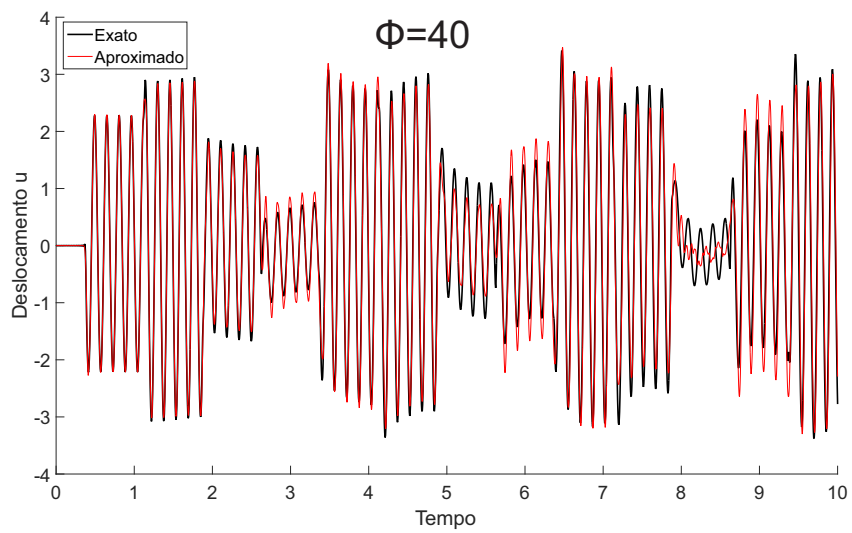
5.2.2 Problema 2: Condição de Neumann

A figura 5.4 representa os deslocamentos da solução analítica e aproximada do Problema 2 no ponto $x = \frac{L_x}{2}$ e $y = \frac{L_y}{2}$ para $\phi = 10, 20$ e 70 . Note que, assim como no Problema 1, a solução aproximada se distancia da solução analítica na medida em que a frequência de excitação aumenta, isto é, a solução analítica pode se tornar mais difícil de ser aproximada aumentando o valor do parâmetro ϕ . Para demonstrar a eficácia da solução analítica do Problema 2, a figura (5.6) ilustra uma comparação das soluções em todo os pontos do domínio, para o instante de tempo $t = 4$, com $n_t = 1000$ ($\Delta t = 0.004, \Delta x = \Delta y = 0.0136$), com $\phi = 10$.

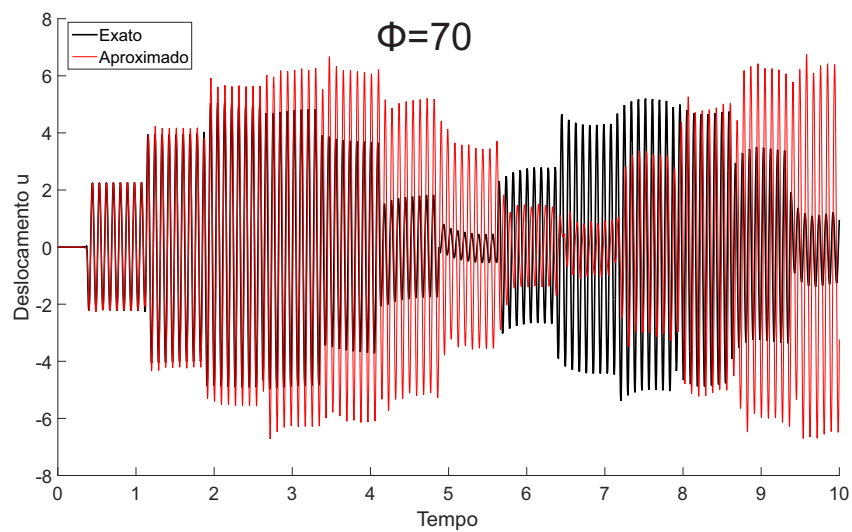
Pela figura (5.5), assim como no Problema 1, percebe-se que a convergência da solução aproximada se dá para os demais pontos do domínio, mostrando que a solução analítica é útil como suporte para analisar métodos numéricos no que diz respeito a sua precisão, levando em consideração a frequência de excitação ϕ e também a condição de Neumann prescrita em $x = L_x$, formulada pelo modelo proposto do Problema 2.



a)

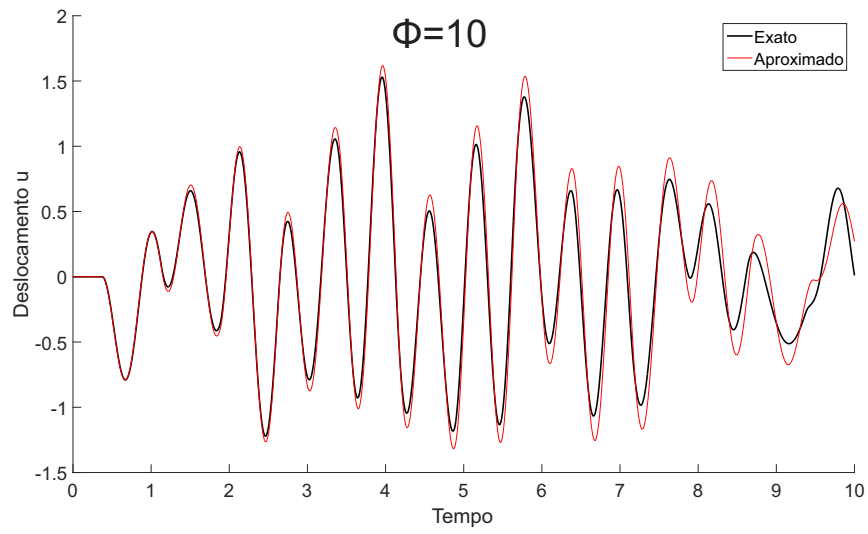


b)

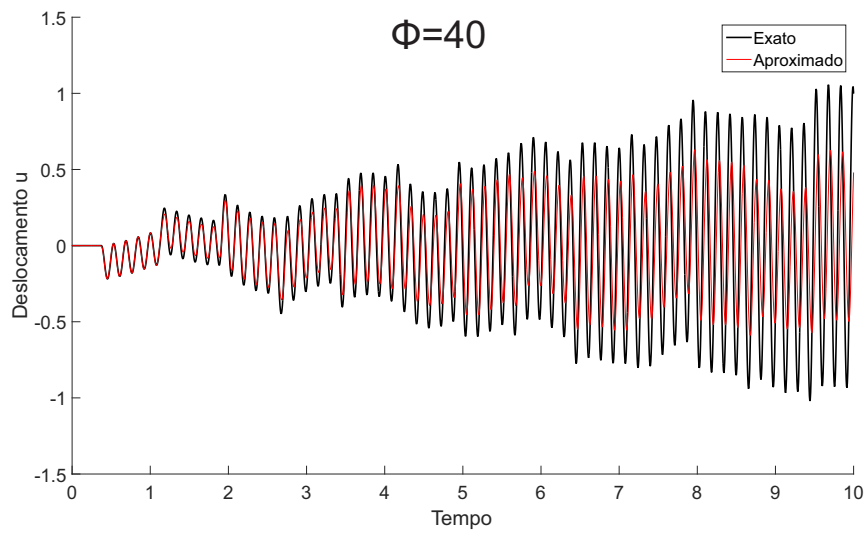


c)

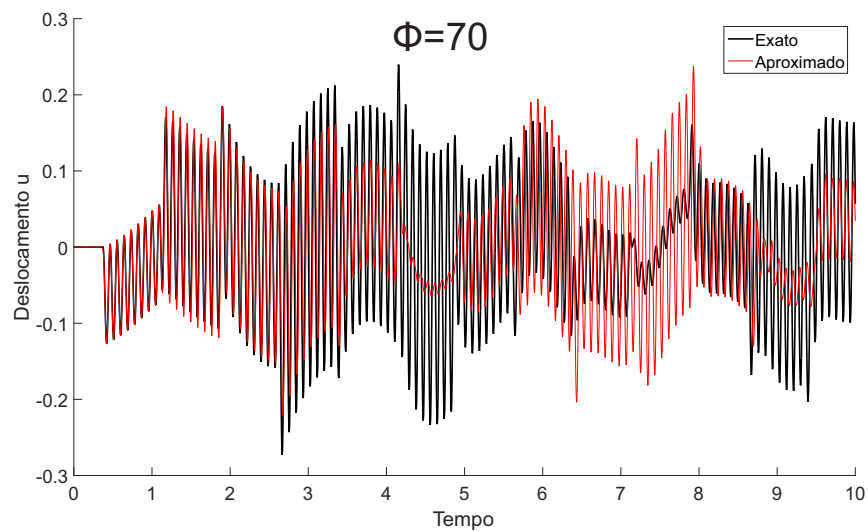
Figura 5.3: Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 1 para
a) $\phi = 10$, b) $\phi = 40$ e c) $\phi = 70$



a)



b)



c)

Figura 5.4: Solução analítica \times Solução aproximada via MDF do Problema 2 para
a) $\phi = 10$, b) $\phi = 40$ e c) $\phi = 70$

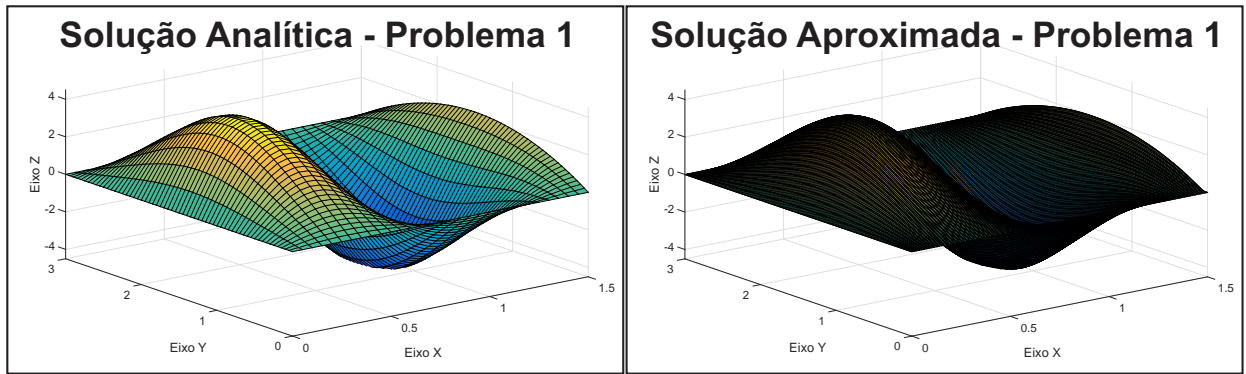


Figura 5.5: Comparação da solução aproximada e analítica do Problema 1 para $t = 3$

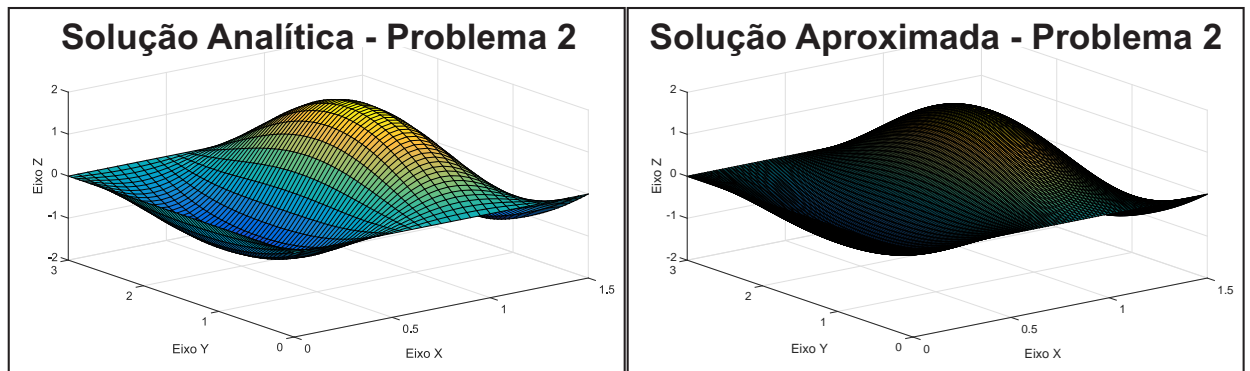


Figura 5.6: Comparação da solução aproximada e analítica do Problema 2 para $t = 4$

6 CONCLUSÕES

Os resultados encontrados nos levaram a concluir que as soluções analíticas de referência dos problemas propostos são de grande utilidade como soluções suportadas para realizar análise e comparação de métodos numéricos bidimensionais extremamente precisos. Além disso, os resultados também estabeleceram limites para o Método das Diferenças Finitas (MDF) no que diz respeito a sua precisão de cálculos, levando em consideração a frequência de excitação ϕ , abrindo a possibilidade de que novos métodos possam ser desenvolvidos para que esses limites sejam superados.

Podemos concluir também que o parâmetro ϕ , caracterizado como a frequência de excitação da membrana, serviu de fato para tornar a solução exata dos problemas propostos mais difícil de ser numericamente aproximada, na medida em que o valor de ϕ aumenta, viabilizando a análise não só do MDF mas também de outros métodos numéricos bidimensionais de alta precisão. Para trabalhos futuros, seguindo a mesma linha de investigação do tema em questão, outras soluções analíticas de referência poderiam ser obtidas para Equação da Onda Tridimensional, levando em consideração parâmetros que tornem a solução exata mais difícil de ser numericamente calculada, viabilizando a comparação e análise de métodos numéricos tridimensionais.

Referências Bibliográficas

- [1] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [2] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*, 9th ed. Brooks/Cole, 2010.
- [3] CERQUEIRA, S. H. D. N., AND SOARES, J. D. J. Método das curvas características para solução de equações diferenciais parciais de primeira ordem.
- [4] CLOUGH, R., AND PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [5] DUFFY, D. G. *Advanced Engineering Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [6] GOMES-RUGGIERO, M., AND LOPES, V. *Calculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais*, 1996.
- [7] HUGHES, T. J. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, vol. 1. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [8] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 9th ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [9] LANGTANGEN, H. P. Finite difference methods for wave motion, 2014.
- [10] LIMA, R. S., DE SÁ, R. R. M., AND TORII, A. J. *Uma Solução de Referência para a Equação da Onda Unidimensional*. Proceedings of XIX ENMC - National Meeting on Computational Modeling and VII ECTM - Meeting on Materials Science and Technology, João Pessoa, 2016.

- [11] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, Tokio, 1975.
- [12] PINCHOVER, Y., AND RUBINSTEIN, J. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [13] TORII, A., AND MACHADO, R. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. In *Latin American Journal of Solids and Structures* (São Paulo, 2012), M. Alves and H. da Costa, Eds., vol. 9 of *Structural Mechanics (P)*, pp. 309–337.
- [14] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: The Basis*, 5th ed., vol. 2. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

7 APÊNDICE

Códigos das soluções analíticas

Código para gerar a solução analítica do Problema 1:

```
1 function U=Prob1_Exato(c, Lx, Ly, t, PHI, M, N, dx, dy)
2 x=0:dx:Lx;
3 y=0:dy:Ly;
4 VA_x_y_t = 0;
5 VB_x_y_t = 0;
6 for m=1:M
7     for n=1:N
8         lamb_m_n=c*pi*sqrt(((m/Lx)^2)+((n/Ly)^2));
9         %Integral Exata Problema A
10        qX = ((Lx^2)*(-pi*m*((-1)^m)))/((pi*m)^2);
11        qY = ((-PHI/Lx)*((Ly^3)*((2*((-1)^n))-2)))/((pi*n)^3);
12        B_ast_m_n= (4*qX*qY)/(Lx*Ly*lamb_m_n);
13        %Integral Exata Problema B
14        qY1=((PHI^2)*((Ly^3)*(2*((-1)^n)-2)))/((pi*n)^3);
15        qY2=((2*(c^2))*(Ly*(1 - ((-1)^n)))/((pi*n);
16        b=(4*qX*(qY1+qY2))/(Lx*Ly);
17        z=sqrt((((c*m*pi)/Lx)^2)+(((c*n*pi)/Ly)^2));
18        A_2=(-PHI*b)/(z*Lx*((z^2)-(PHI^2)));
19        B_m_n_t=(A_2*sin(z*t))+((sin(PHI*t)*b)/(Lx*((z^2)-(
20        PHI^2)))));
    %Solucao do Problema A
```

```

21      VA_x_y_t=(VA_x_y_t) + ( B_ast_m_n*sin(lamb_m_n*t) )
      *(sin( ((m*pi)/Lx)*x )) *(sin( ((n*pi)/Ly)*y ));
22      %Solucao do Problema B
23      VB_x_y_t=(VB_x_y_t)+ ( B_m_n_t*( sin( ((m*pi)/Lx)*x
      )) *(sin( ((n*pi)/Ly)*y )) );
24  end
25 end
26 U = (VA_x_y_t) + (VB_x_y_t) + ( ((sin(PHI*t)/Lx)*x) '*
      fy_prob1(y,Ly) );
27 end

```

Código para gerar a solução analítica do Problema 2:

```

1  function U=Prob2_Exato(c, Lx, Ly, t, PHI, M, N, dx, dy)
2  x=0:dx:Lx;
3  y=0:dy:Ly;
4  VA_x_y_t = 0;
5  VB_x_y_t = 0;
6  for m=1:M
7      for n=1:N
8          lamb_m_n=c*pi*sqrt( (((2*m-1)/(2*Lx))^2)+((n/Ly)^2) );
9          %Integral Exata Problema A
10         qX = -4*Lx^2*(((-1)^m))/(pi-2*pi*m)^2;
11         qY = (-PHI)*(Ly^3*(2*((-1)^n)-2))/(pi*n)^3;
12         B_ast_m_n= (4*qX*qY)/(Lx*Ly*lamb_m_n);
13         %Integral Exata Problema B
14         qY1=( (PHI^2)*((Ly^3)*(2*((-1)^n)-2)) )/((pi*n)^3);
15         qY2=( (2*(c^2) )*(Ly*(1 - ((-1)^n) ) ) )/(pi*n);
16         b=(4*qX*(qY1+qY2))/(Lx*Ly);
17         %Solucao do Problema A

```

```

18      VA_x_y_t = VA_x_y_t + ( B_ast_m_n*sin(lamb_m_n*t) ) *
      sin(( (2*m-1)*pi/(2*Lx) ) * x ) * sin(((n*pi)/Ly)*y)
      ;
19      %Solucao do Problema B
20      z=sqrt( (( (2*m-1)*pi*c)/(2*Lx) ) ^2)+((c*n*pi/Ly)
      ^2) );
21      A_2=-(PHI*b)/(z*(z^2-PHI^2));
22      B_m_n_t_x=((sin(PHI*t)*b)/(z^2-PHI^2)) + A_2*sin(z
      *t) );%*( sin(((m*pi)/Lx)*X)*csc(( (2*m-1)*pi/(2*
      Lx) ) * X ));
23      VB_x_y_t=VB_x_y_t+B_m_n_t_x*sin(( (2*m-1)*pi/(2*Lx)
      ) * x ) * sin(((n*pi)/Ly)*y) ;
24  end
25 end
26 U = VA_x_y_t+VB_x_y_t + ((sin(PHI*t))*x) * fy_prob2(y,Ly) ;
27 end

```

Código para definir $f(y)$:

```

1 function Y=fy_prob1(y,Ly)
2 Y = y.*(y-Ly).^1;
3 end

```